MÓDULO 1 · NÚMEROS NATURALES, CONJUNTOS Y ENTEROS

1.4

Divisibilidad y números primos

la escalera de factores

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

La pregunta de este capítulo

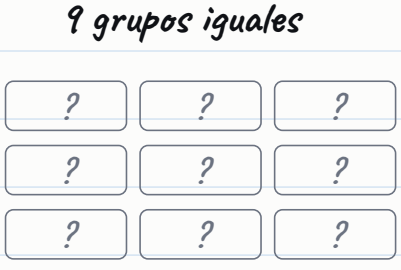
Este número tiene diez cifras:



1 234 567 890

¿Se puede repartir en 9 grupos iguales, sin que sobre nada?

Sin hacer la división: hay un truco que lo dice en segundos.



Guárdenla: al final del capítulo la respondemos (p. 31).

En este capítulo van a...

- usar los criterios de divisibilidad;
- distinguir primos de compuestos;
- descomponer con la escalera de factores.

Lo que ya saben

dividir naturales ✓ exponentes ✓

de la Lección 1.3: dos por dos es dos al cuadrado.

la clase en video
6:42 min

Palabras que van a usar

Estas son las palabras del capítulo. Cada una tiene su dibujo; vuelvan a esta página cuando una se les olvide.



divisor y múltiplo
12 fichas en 3 grupos de 4: 3 es **divisor** de 12 y 12 es **múltiplo** de 3

$12 \div 3 = 4$
no sobra nada

es divisible por
la división es exacta: 12 **es divisible por** 3

primo
exactamente dos divisores, 1 y él mismo: 7 solo cabe en una fila

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

descomposición en primos
el número escrito como multiplicación de primos: su «ADN»



Primero las palabras, después las cuentas: así el método no se mezcla con vocabulario nuevo.

Lo que ya saben. Dividir números naturales y escribir factores repetidos con exponente, como en la Lección 1.3: $2 \cdot 2 = 2^2$. Un número que no es primo, y no es el 1, se llama **compuesto**.

En el aula, con las manos

Cada grupo recibe un puñado de fichas (tapas, granos de maíz, botones): 12, 7, 15, 13 o 21. Tienen que acomodarlas en rectángulos completos, sin que sobre ninguna, y anotar todos los rectángulos que encuentren. ¿Qué números solo caben en una fila?

1 Divisible sin dividir

en el video: **0:43**

Doce fichas se reparten en tres grupos de cuatro, y no sobra ninguna. Por eso decimos que 3 es **divisor** de 12, que 12 es **múltiplo** de 3 y que 12 es **divisible por** 3. Para saberlo sin dividir hay **criterios**.

Las tres frases dicen lo mismo, mirado desde el 3 o desde el 12.

Los criterios de divisibilidad

por 2	el número termina en cifra par (0, 2, 4, 6, 8)
por 5	termina en 0 o en 5
por 10	termina en 0
por 3	la suma de sus cifras es múltiplo de 3
por 9	la suma de sus cifras es múltiplo de 9



Por 2, 5 y 10 se mira la última cifra; por 3 y 9 se suman las cifras.

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

Ejercicio 1 ¿Por cuáles es divisible 60? 0:57 (1) (2) (3) resuelto, para mirar

① *60 termina en 0 → por 2 ✓ por 5 ✓ por 10 ✓*

② *6 + 0 = 6 → por 3 ✓ por 9 ~~no~~*

2 Primos y compuestos

en el video: **1:35**

Ahora acomoden fichas en rectángulos. Doce caben en una fila de doce, en dos filas de seis o en tres filas de cuatro. Siete, solo en una fila de siete.

Cada rectángulo es una pareja de divisores.



La idea: primo y compuesto

Un número es **primo** si tiene **exactamente dos divisores**: el 1 y él mismo. Siete es primo. Doce tiene seis divisores (1, 2, 3, 4, 6, 12): es **compuesto**. Y el 1 tiene un solo divisor: **no es primo ni compuesto**.

Piénsenlo antes de seguir

tapen lo de abajo con una hoja

¿Verdadero o falso? 51 es primo. *V* *F*



Tapen lo de abajo y decidan antes de seguir leyendo.

Falso. Sus cifras suman 6: es divisible por 3. Cincuenta y una fichas caben en **tres filas de diecisiete**. 51 tiene cuatro divisores: 1, 3, 17 y 51.



⊗ **Así lo escribió un compañero**

«51 es primo porque es impar»

✓ **Así es**

$51 = 3 \cdot 17$: es compuesto

Por qué: ser impar no basta: 9 y 15 tampoco son primos. Un número es primo solo si no admite ningún rectángulo distinto de una fila.

3 La escalera de factores

en el video: **2:37**

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

Todo número compuesto se puede escribir como una multiplicación de primos, y **de una sola forma**, sin contar el orden. Es como su **ADN**. Para encontrarlo usamos la escalera: **dividan siempre por el primo más pequeño que sirva**.

Al llegar a 1, se acaba. Los primos de la derecha son la respuesta.

Ejercicio 2 La escalera de 60

2:55 · 1 2 3 · resuelto, para mirar

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

① 60 es par: $60 \div 2 = 30$

② 30 es par: $30 \div 2 = 15$

③ 15 no es par; $1 + 5 = 6$: $15 \div 3 = 5$

④ $5 \div 5 = 1$ se acaba

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = \boxed{2^2 \cdot 3 \cdot 5}$

El árbol: una sola forma

Con el árbol se ve lo de una sola forma. Empiecen por 6×10: el 6 se abre en 2×3, y el 10 en 2×5. Las hojas son las mismas: 2, 2, 3 y 5.

Otro camino, 4×15, termina en las mismas hojas.





Ojo. No paren antes: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 15$ está **incompleto**. 15 no es primo, es $3 \cdot 5$. La escalera sigue hasta que abajo quede un 1 (minuto 3:38 del video).

Ejercicio 3 La escalera de 84

3:52 · 1 2 3 · complétenlo

84	2
42	2
21	☐
7	7
1	

① $84 \div 2 = 42$

$42 \div 2 = 21$

② $21 \div$ ☐ $= 7$ ¿qué primo?

③ $7 \div 7 = 1$

$84 = 2^2 \cdot$ ☐ $\cdot 7$

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

Ejercicio 4 La escalera de 180, sin ayuda

4:45 (1) (2) (3) sin ayuda

180

Fase 3: el video les da 5 segundos. Empiecen por el 2.

Para el cuaderno de trabajo

Dos más (el video los deja en el minuto 5:05): ¿4518 es divisible por 2, por 3, por 5 y por 9? Y 84 manzanas: ¿en cuántas bolsas iguales se empacan sin que sobre ninguna? La escalera de 84 les da todas las opciones.



84 manzanas en bolsas iguales, sin que sobre ninguna.

> **Para recordar**
>
> 1. Por 2, 5 y 10, miren la última cifra; por 3 y 9, sumen las cifras.
> 2. Un primo tiene exactamente dos divisores, y el 1 no es primo.
> 3. En la escalera, dividan por el primo más pequeño hasta llegar a 1.

✓ *La respuesta a la pregunta*

en el video: **5:46**

Sumen las cifras del número grande: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+0=45$. Cuarenta y cinco es múltiplo de 9 ($45 = 9 \times 5$). Entonces **sí**: se puede repartir en 9 grupos iguales, sin que sobre nada.

> **Comprobación**
>
> $$1\,234\,567\,890 = 9 \times 137\,174\,210$$
>
> Cada grupo tendría 137 174 210. El criterio lo dijo antes de hacer la cuenta.



¡Pregunta pagada! Sin dividir un número de diez cifras.

Para qué les sirve

En 10.º y 11.º esto se usa en «Argumentar con números: pares, divisibilidad y contraejemplos». **Lo que sigue:** Lección 1.5, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, que se calculan con estos mismos factores primos.

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

Para seguir estudiando

Recursos

escaneen con la cámara del celular

La clase
video de 6:42, en la lección del curso

El short
el error típico en un minuto

La lista
todas las clases del módulo

Prompts para estudiar con IA

Péguenlos en un asistente de IA: están escritos para que les **pregunte**, no para que les responda. Y comprueben cada número: la IA también se equivoca con las cuentas.

1. Dígame 6 números, uno por uno, y pídame que diga sin dividir si son divisibles por 2, 3, 5, 9 o 10, explicando el criterio. No me diga la respuesta: espere la mía.
2. Pídame la escalera de factores primos de 4 números entre 50 y 300. Si me detengo en un número que no es primo, no me corrija: pregúnteme si ese número tiene divisores.
3. Le voy a explicar por qué 51 no es primo y por qué el 1 tampoco lo es. Hágame preguntas como un profesor hasta que yo mismo encuentre lo que me falte.

Referencias

Contenido Ficha P1-L4 del curso (v3 auditada) y guion del video P1-L4-clase: ejemplos, números y palabras.

Estándares MEN (2006). *Estándares básicos de competencias*, p. 84: 67N5 (propiedades de la teoría de números) y 67N11 (conjeturas sobre propiedades de los números). MEN (2016). *DBA Matemáticas* V.2, grado 6.º, DBA 2, p. 45.

Contenido OpenStax (2020). *Prealgebra* 2.ª ed., CC BY 4.0, §2.4 «Find Multiples and Factors» (PDF p. 149) y §2.5 «Prime Factorization and the Least Common Multiple» (PDF p. 162) [por verificar].

Representación Van de Walle et al. (2019), p. 209 (PDF 210), actividad 9.6 «Factor Patterns»: primos y compuestos con arreglos rectangulares. Los errores «el 1 es primo», «todo impar es primo» y «parar la escalera en un compuesto» no tienen estudio en el corpus (lo declara la ficha).

Didáctica Sweller, Ayres y Kalyuga (2011). *Cognitive Load Theory*, p. 172 (PDF 192):

Soluciones

Ej. 3. $21 \div 3 = 7$:
$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$.

Ej. 4.
$180, 90, 45, 15, 5, 1$
con 2, 2, 3, 3, 5:
$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Piénselo: falso;
$51 = 3 \cdot 17$.

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

resuelto → con hueco → sin ayuda. Clark y Mayer (2016), p. 209 (PDF 229): vocabulario antes del procedimiento. Muller (2008), pp. 165 y 199: predecir antes de ver.

Imágenes Manzanas: IGANZE, Wikimedia Commons, «Apples in the basket.jpg», CC0. Zumbi, fichas, escaleras, árboles e íconos pixel: dibujados por código (*CREDITOS.md*).

Sus notas: escaleras de práctica y dudas para la clase

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM