MÓDULO 1 · NÚMEROS NATURALES, CONJUNTOS Y ENTEROS

1.8



Multiplicar y dividir enteros

de dónde sale «menos por menos da más»

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

La pregunta de este capítulo

Menos tres por menos cuatro: ¿más o menos doce?

$$(-3) \times (-4) = ?$$

«porque sí»

+12 **−12**

Muchos dicen «porque sí». Hoy lo van a poder demostrar:

con un patrón y con un argumento

Guárdenla: al final del capítulo la respondemos con el argumento (p. 64).

En este capítulo van a...

- explicar de dónde sale «menos por menos da más» con un patrón y con un argumento;
- multiplicar y dividir enteros con la ley de los signos, y comprobar una división multiplicando;
- distinguir cuándo se usa la ley de los signos (multiplicar y dividir) y cuándo no (sumar y restar).

Lo que ya saben

el caminante ✓ la distributiva ✓

y que $3 \times 4 = 4 + 4 + 4$

(Lecciones 1.7 y 1.2).

la clase en video
7:31 min

Palabras que van a usar

Antes de cualquier cuenta, estas son las palabras del capítulo; vuelvan a esta página cuando una se les olvide.

$(-3)\cdot 4=-12$

producto y cociente
el resultado de multiplicar y el de dividir

$(-)(-)=+$

ley de los signos
signos iguales, positivo; distintos, negativo. **Solo** para multiplicar y dividir

$3\times(-4)$

factor negativo
un número negativo que se multiplica

$12\div 0=?$

división por cero
no está definida: no hay ningún resultado



Lo que ya saben: el caminante (1.7), la distributiva (1.2) y que $3\times 4=4+4+4$.

Multiplicar por un número natural es sumar repetido: $3\times 4=4+4+4$. La pregunta del capítulo es qué pasa cuando el factor que se repite, o el que cuenta las veces, es negativo.

En el aula, con las manos

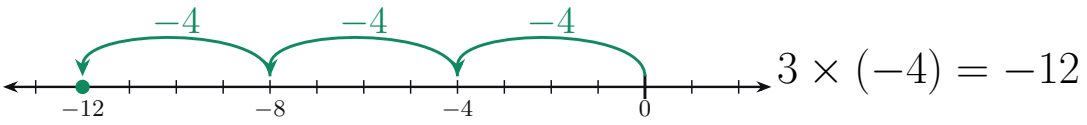
Graben con un celular a un estudiante que camina hacia atrás. Después pongan el video en reversa: lo ven caminar de frente. Dos «al revés» se anulan. Es la imagen de la regla que van a construir.

▶ en el video: **0:36**

1 De dónde sale la regla

Un factor negativo: sumar repetido

$3\times(-4)$ es sumar tres veces -4, y una suma repetida arranca en el 0: -4, -8, -12.



El patrón de la tabla

Ahora una tabla con el -4 fijo. Cada vez que el primer factor baja uno, el resultado **sube cuatro**.

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

$$\begin{aligned} 3 \times (-4) &= -12 \\ 2 \times (-4) &= -8 \\ 1 \times (-4) &= -4 \\ 0 \times (-4) &= 0 \\ -1 \times (-4) &= \square \end{aligned}$$

+4 +4 +4 +4

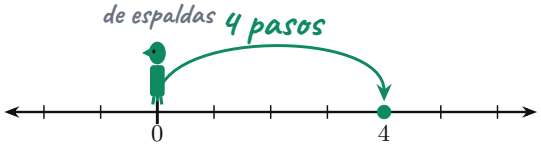
Piénsenlo antes de seguir tapen lo de abajo con una hoja

Si el patrón sigue, ¿cuánto da $(-1) \times (-4)$?

Sube cuatro otra vez: **4, positivo**. Y sigue: $(-2)\times(-4) = 8$ y $(-3)\times(-4) = 12$. El 12 del principio.

En la recta: un factor negativo hace mirar a la izquierda

Un primer factor negativo hace que el caminante mire a la izquierda, como en la resta de la Lección 1.7: es **restar repetido desde el 0**. $(-1) \times (-4)$: parte en el 0, mira a la izquierda, y el -4 lo hace caminar de espaldas: avanza a la derecha, hasta el 4. Como el video en reversa: dos «al revés», de frente.



mira a la izquierda (factor -1)
de espaldas (-4): avanza a la derecha

La idea del capítulo: la ley de los signos

Signos iguales, positivo; signos distintos, negativo. Como el orden no cambia el producto, $(-3) \times 4 = 4 \times (-3)$.

$$(+)(+) = + \qquad (-)(-) = + \qquad (+)(-) = (-)(+) = -$$

Ojo: solo para multiplicar y dividir.

2 Multiplicar y dividir

en el video: **2:27**

Ejercicio 1 **Menos cinco por menos seis** 2:27 (1) (2) (3) resuelto, para mirar $(-5) \times (-6)$.

① signo = dos negativos: iguales, +
② números = 5 × 6 = 30
③ (−5)(−6) = +30



Primero el signo; después la cuenta de siempre, con los números sin signo.

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

Ejercicio 2 Menos siete por menos tres

2:43 1 2 3 complétenlo

$(-7)\times(-3)$. Los números ya están: $7\times3=21$. ¿Qué signo lleva el resultado?

① signo = iguales: ☐

② números = 7 × 3 = 21

③ (−7)(−3) = ☐ 21

Ejercicio 3 Cuatro factores

3:26 1 2 3 sin ayuda

$(-2)(3)(-5)(-1)$. Pista: cada factor negativo cambia hacia dónde mira el caminante.

Muchos factores: contar los negativos

Un número **par** de factores negativos da positivo; uno **impar**, negativo: $(-2)^2=4$ y $(-2)^3=-8$. Las potencias de base negativa de la Lección 1.3 siguen esa cuenta; en el cuaderno de trabajo está $(-2)^4$.

Dividir: la misma ley

$12\div3=4$ porque $3\times4=12$: dividir pregunta **qué número, multiplicado por el divisor, da el dividendo**. Por eso la ley de los signos es la misma, y toda división se comprueba multiplicando.

Ejercicio 4 Menos treinta y seis entre nueve

3:51 1 2 3 resuelto, para mirar

$(-36)\div9$.

① signo = distintos: −

② números = 36 ÷ 9 = 4

③ (−36) ÷ 9 = −4

compruebo: 9 × (−4) = −36 ✓



Dividir y multiplicar con signos sirve para el cambio en el tiempo: el termómetro de la práctica.

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

Ejercicio 5 Menos cuarenta y ocho entre menos seis

4:06 (1) (2) (3)

complétenlo

$(-48) \div (-6)$: ¿qué número, multiplicado por -6, da -48?

① signo = iguales: +

② compruebo = $(-6) \times$ ☐ $= -48$

③ $(-48) \div (-6) =$ ☐

> **¿Por qué no se divide entre cero?**
>
> $12 \div 0$ pregunta qué número multiplicado por 0 da 12. Ninguno: todo número por 0 da 0. No existe. ¿Y $0 \div 0$? Sirve cualquier número, así que tampoco hay *un* resultado. **Entre cero no se divide.**

Ejercicio 6 Setenta y dos entre menos ocho

4:54 (1) (2) (3) sin ayuda

$72 \div (-8)$. Compruébenla multiplicando.

3 Cuándo no se usa

en el video: **5:02**

> **Piénsenlo antes de seguir** tapen lo de abajo con una hoja
>
> ¿Verdadero o falso? $-2 + (-3) = +5$, «porque menos por menos da más». V F

Aquí no hay ningún «por»: es una suma, y en la suma manda el caminante. Parte en -2, mira a la derecha y da tres pasos de espaldas: -5.

⊗ Así lo escribió un compañero

$-2 + (-3) = +5$, «porque menos por menos da más»

✓ Así es

$-2 + (-3) = -5$

Por qué: se usó la ley de los signos en una suma. La ley es solo para multiplicar y dividir; en la suma, dos deudas son una deuda más grande.



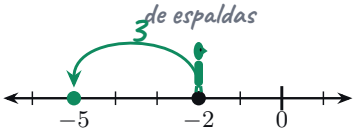
Mismos números, otra operación: $(-2)(-3) = +6$, *pero* $-2 + (-3) = -5$.

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

multiplicar: ley de los signos

$$(-2) \times (-3) = +6$$

sumar: el caminante



$= -5$

El otro tropiezo: el signo que se pierde al dividir

¿Cuánto da $(-24) \div (+6)$? En un estudio con estudiantes de 14 años, solo el 44 % acertó; el 12 % respondió 4. Es -4: signos distintos, negativo. Y se comprueba: $6 \times (-4) = -24$.



Ojo. La ley de los signos no cambia la cuenta de los números, solo decide el signo. Después de dividir, miren otra vez: ¿los signos eran iguales o distintos?

Para practicar, en el cuaderno de trabajo: la temperatura que baja 3 °C por hora (en 4 horas cambia $4 \times (-3) = -12$ °C; ¿cuántos grados más caliente estaba hace 2 horas?), potencias de negativos como $(-2)^3$ y $(-2)^4$, y el argumento del final probado con otro par.

Para recordar

1. Signos iguales, positivo; distintos, negativo.
2. Al dividir, la misma ley; se comprueba multiplicando, y entre cero no se divide.
3. En la suma no hay «menos por menos».

Las tres reglas del minuto 6:15 del video, con las mismas palabras.

en el video: **6:33**

La respuesta: el argumento



¡Pregunta pagada! El patrón sugiere; el argumento convence.

¿Por qué $(-3)\times(-4)$ da 12? El patrón lo sugirió; este argumento no depende de la tabla. Usa la distributiva de la Lección 1.2:

① $(-3) \cdot 0 = 0$ *todo número por 0 da 0*

② $0 = 4 + (-4)$

③ $(-3) \cdot (4 + (-4)) = (-3) \cdot 4 + (-3) \cdot (-4) = 0$

④ $-12 + (-3) \cdot (-4) = 0$

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

lo único que sumado a −12 da 0 es 12: $(-3)\cdot(-4)=12$

El patrón sugiere; el argumento convence. ¿Siempre es cierto? En el cuaderno de trabajo lo prueban con otro par.

Para qué les sirve

En 10.º y 11.º, en «Inecuaciones con productos y cocientes: la tabla de signos» (Mate 10·11 · 1.5), en «Valor absoluto» y en cuatro lecciones más. **Lo que sigue:** después del repaso del módulo, la Lección 2.1: la fracción como número.

Para seguir estudiando

Recursos

escaneen con la cámara del celular

La clase
video de 7:31, en la lección del curso

El short
el error típico en un minuto

La lista
todas las clases del módulo

Soluciones

Ej. 2. positivo: $+21$.

Ej. 3. tres factores negativos: negativo; -30.

Ej. 5. 8*:*
$(-6)\times 8=-48$.

Ej. 6. -9*:*
$(-8)\times(-9)=72$.

Piénsenlo: el patrón da 4; el V o F es falso: -5.

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM



Si la IA les suelta la respuesta, escríbanle: «No me la diga; deme solo una pista».

Prompts para estudiar con IA

Péguenlos en un asistente de IA: están escritos para que la IA les **pregunte**, no para que les responda.

1 Estoy aprendiendo la ley de los signos. Hágame 6 operaciones mezcladas, una por una (multiplicaciones, divisiones y también sumas con negativos). Antes de que yo calcule, pregúnteme si en esa operación se usa o no la ley de los signos. No me dé el resultado.

2 Muéstreme una tabla como la de mi guía, pero con el -5 fijo ($3 \times (-5)$, $2 \times (-5)$...), y pídame que adivine cómo sigue después del 0. Si me equivoco, pregúnteme cuánto sube cada fila.

3 Le voy a explicar con mis palabras el argumento de la distributiva para $(-2) \times (-5) = 10$. Hágame preguntas como un profesor hasta que yo mismo encuentre lo que me falte. No me corrija con la respuesta.

La IA también se equivoca con los signos: comprueben cada división multiplicando.

Referencias

Contenido Ficha P1-L8 del curso (v2 auditada) y guion del video P1-L8-clase v2. OpenStax, *Prealgebra* 2e, §3.4, PDF p. 229. El argumento con la distributiva: demostración estándar.

El patrón Van de Walle, J. A., Karp, K. S. y Bay-Williams, J. M. (2015). *Elementary and Middle School Mathematics* (9.ª ed.). Pearson. p. 625 (PDF 626): las reglas como generalización de una serie de productos; pp. 625-626 (PDF 626-627), fig. 23.12: un primer factor negativo es restar repetido desde 0.

El estudio Ryan, J. y Williams, J. (2007). *Children's Mathematics 4-15*. Open University Press. Apéndice 1, p. 218, ítem M14.18a (prueba de 14 años): en $(-24) \div (+6)$ acierta el 44 % y el 12 % responde 4 («negative sign ignored»).

El error de la suma Blueprint «Negativos sin miedo» del canal, §10: $-2 + (-3) = +5$ por mezclar sumar con multiplicar (documento interno).

Currículo MEN (2006). *Estándares básicos de competencias*, p. 84 (67N6, 67N7). MEN (2016). *DBA Matemáticas* V.2: 7.º DBA 1 (p. 53) y 6.º DBA 2 (p. 45).

Didáctica Muller (2008), p. 199 (PDF 219): predecir antes de ver. Sweller, Ayres y Kalyuga (2011), p. 172 (PDF 192): resuelto → con hueco → sin ayuda.

Imágenes Termómetro de mínima y máxima: AtelierMonpli, Wikimedia Commons, «Minimum-maximum-Thermometer 2755.jpg», dominio público. Zumbi, tabla, caminante, rectas e íconos pixel: dibujados por código (*CREDITOS.md*).

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM